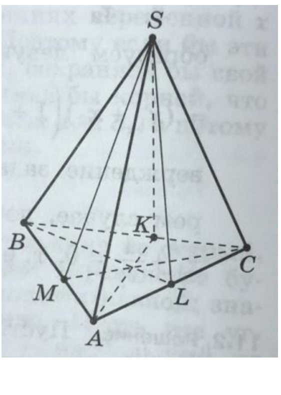
11 КЛАСС

11.1. Ответ: $x = 0$. **Решение:** Так как $4 + x^2 \geq 4$, а $\frac{8 - sin^2 x}{2 + x^4} \leq 4$, то уравнение имеет решения только в случае, когда и левая, и правая части уравнения равны 4, а это возможно лишь при $x = 0$.

11.2. Ответ: не может. **Первое решение:** Подставляя $x = 1234$ в оба трёхчлена и приравнивая их, получаем $1234^2 \times b + 1234 \times c + a = 1234^2 \times c + 1234 \times a + b$, или, после переноса всех членов в левую часть, $(1234^2 - 1)b + (1234 - 1234^2)c + (1 - 1234)a = 0$. Разделив последнее равенство на 1233, имеем $1235b - 1234c - a = 0$, т.е. $a = 1235b - 1234c$. Тогда значение первого трёхчлена в точке 1 равно $a + b + c = 1236b - 1233c = 3(412b - 411c)$, т.е. делится на 3; значит, оно не может равняться 2020.

Второе решение: Рассмотрим многочлен $P(x)$, равный разности данных в условии квадратных трёхчленов. $P(x) = (b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b)$. Его степень не больше 2. По условию, $P(1234) = 0$; кроме того, очевидно, $P(1) = 0$. Значит, если его степень равна 2, то по теореме Безу $P(x) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$. Если же степень меньше 2, то он может быть только нулевым (поскольку у него есть два корня); тогда $a = b = c$, и всё равно верно равенство $P(x) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$. Приравнивая свободные члены в равенстве $P(x) = (b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$, получаем $a - b = 1234(b - c)$, откуда $a = 1235b - 1234c$. Дальше решение можно завершить так же, как и предыдущее.

11.3. Ответ: $\mathbf{\frac{2}{4041}}$. **Решение:** Неравенство $\frac{1}{2021} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2020}$ равносильно неравенству $2020 < \frac{n}{m} < 2021$, которое будет равносильно неравенству $2020m < n < 2021m$. Если $m = 1$, то последнее неравенство не имеет смысла, так как n – натуральное число. Если $m = 2$, то получаем $4040 < n < 4042$, и $n = 4041$. Так как при $m > 2$ интервалы вида $(2020m; 2021m)$ располагаются на числовой оси правее числа 4041, то найденное значение $n = 4041$ является наименьшим.



11.4. Доказательство: Пусть *SABC* – данная пирамида, *SK, SL, SM* соответственно биссектрисы боковых граней *SBC, SCA, SAB* (рис.). По условию *AK* и *BL* – биссектрисы углов *A* и *B* треугольника *ABC*, и нужно доказать, что *CM* –

биссектриса угла *C*. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BS}{CS} = \frac{BK}{CK} = \frac{BA}{CA}$ и $\frac{CS}{AS} = \frac{CL}{AL} = \frac{CB}{AB}$.

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим

$$\frac{BS}{AS} = \frac{CB}{CA}$$

А это и означает, что основания биссектрис, проведённых к стороне *AB* в треугольниках *BSA* и *BCA*, совпадают, т.е. CM – биссектриса в треугольнике *ABC*.

11.5. Ответ: Если при наложении таблиц в некоторой строке совместились клетки разного цвета, то в этой строке найдется еще одна такая же пара клеток. Если бы это было не так, то количество синих клеток отличалось бы в совмещаемых строках двух таблиц на единицу, что невозможно, так как число синих клеток в каждой строке – четное. Рассуждая аналогично, в столбце, в котором наложились клетки разного цвета, найдем еще пару клеток разного цвета. А в строке, содержащей эту пару клеток разного цвета, найдем еще пару, содержащую разноцветную пару. Так как все эти три пары совмещаемых разноцветных клеток различные и не совпадающие с исходной парой, то этим мы доказали, что найдутся еще три клетки, накрытые клетками другого цвета.