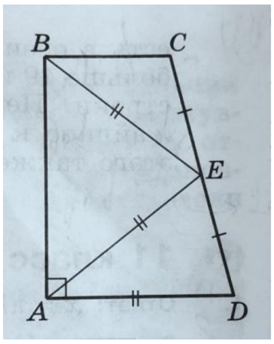
10 КЛАСС

10.1. Доказательство: Пусть эти 4 последовательных числа: $n, n+1, n+2, n+3$. Тогда $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$.

10.2. Решение: Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 2$, тогда $y_0 = 4+2p+q = 4+2\left(p+\frac{q}{2}\right) = 4044$. Имеем: графики всех трехчленов проходят через точку $(2; 4044)$.

10.3. Ответ: 4 игрока. Победил рыжий. **Решение:** Если блондинов было n, то всего игроков 4n. Они сыграли между собой $\frac{4n(4n-1)}{2}$ партий, из которых половина, то есть $n(4n-1)$ партий была выиграна рыжими, набравшими, следовательно, в сумме $n(4n-1)$ очков. Каждый ражий сыграл по $4n-1$ партии и мог набрать не более $4n-1$ очков, значит, каждый рыжий выиграл каждую партию, в которой участвовал. Отсюда следует, что рыжих не могло быть более одного и что этот единственный рыжий обыграл всех остальных и победил в турнире, в котором участвовало 4 игрока.

10.4. Ответ: 72˚**. Решение:** Пусть в трапеции ABCD углы A и B прямые, угол C тупой, E – середина боковой стороны CD (рис.). Тогда в равнобедренном треугольнике BCE ∠CBE = ∠CEB. Пусть каждый из этих углов равен α. Тогда ∠EBA = ∠EAB = 90˚ – α, ∠BCE = 180˚ – 2α, ∠EDA = 180˚ – ∠BCE = 2α. Заметим теперь, что ED = EC = BC < BE = AE и ED = BC < AD (последнее неравенство следует из того, что угол BCD тупой). Тем самым, поскольку треугольник DAE по условию равнобедренный, в нём равны стороны AD и AE, откуда ∠AED = ∠EDA = 2α. Заметим теперь, что ∠CEB + ∠AED = α + 2α + 2α = 180˚, α = 36˚, откуда∠EDA = 2α = 72˚.



10.5. Ответ: при N = 100. **Решение:** Пример расстановки для N = 100 – поставить 100 фишек по диагонали доски. Покажем, что меньшим числом фишек обойтись нельзя. Если на доске стоят не больше 99 фишек, на ней найдется пустой столбец. Он делит доску на две части (если пустой столбец крайний, то одна из частей является пустым множеством). Если в одной из этих частей нет ни одной фишки, сдвинем в другой части фишку, ближайшую к пустому столбцу, в направлении этого столбца, и у неё после этого не будет соседей. Если же фишки есть в обеих частях, то в одной из частей фишек не больше 49 и в ней найдутся две идущие подряд пустые строки. Переместим в направлении этих строк ближайшую к ним фишку из этой части, и у неё после этого также не будет соседей.