

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)**

5 класс

- 5.1. На доске написано число 3 728 954 106. Зачеркните в нем три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали как можно меньшее число.
- 5.2. Если приписать к двузначному числу цифру 7 сначала слева, а потом справа, то разность полученных трехзначных чисел будет равна 351. Найдите двузначное число.
- 5.3. Пять винтиков, два шпунтика и три гаечки весят столько же, сколько весят один винтик, семь шпунтиков и четыре гаечки. Что тяжелее: винтик или шпунтик?
- 5.4. Митя, Сеня, Толя, Юра и Костя пошли на концерт и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конец очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?
- 5.5. Как разрезать прямоугольник длиной в 18 см и шириной 8 см на наименьшее число прямоугольников и сложить из них квадрат?

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)**

6 класс

- 6.1. Не выполняя деления, докажите, что $35 \cdot 125 + 28 \cdot 125 + 63 \cdot 554$ делится на 679.
- 6.2. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Может ли так случиться, что у всех вместе 2018 орехов?
- 6.3. Внутренние покои султана состоят из одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата 10×10 . Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. Сколько дверей во дворце?
- 6.4. У Винни Пуха в шкафу стояло несколько 11-литровых банок с медом (банки могли быть заполнены не целиком). Каждый день Винни Пух подходил к шкафу, брал какую-то банку и ел из нее мед. При этом если в банке было больше 1 л меда, то он съедал половину меда из банки, а если в банке оставался 1 л меда или меньше, то он доедал весь мед из этой банки. За 14 дней Винни Пух съел весь мед. Мог ли он съесть 30 л меда?
- 6.5. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 черных шарика, в другом – 1 черный и 1 белый шарик, в третьем – 2 белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 черных», «черный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только 1 шарик, определить правильное расположение надписей?

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)**

7 класс

- 7.1. Цифру 9, с которой начинается трехзначное число, перенесли в конец числа. В результате получилось число на 216 меньше данного. Какое число было первоначально?
- 7.2. На доске было записано арифметическое выражение, значение которого равнялось 2017, Вася поменял в этом выражении два знака действий местами, и значение выражения стало равно 2018. Покажите, как такое могло произойти.
- 7.3. Путешественник в первый день прошел 20 % всего пути и 2 км. Во второй – прошел 50 % остатка и еще 1 км. В третий день – 25 % оставшегося пути и еще 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?
- 7.4. Каждый из трех человек выписал 100 различных слов. После этого слова, встречающиеся не менее двух раз, вычеркнули. В результате у одного осталось 45 слов, у другого – 68, а у третьего – 54. Докажите, что по крайней мере одно слово выписали трое.
- 7.5. Каждый из трех мальчиков либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Им сообщили шесть натуральных чисел. После этого каждый из мальчиков сделал по два утверждения.
- Петя: 1) Это шесть последовательных натуральных чисел. 2) Сумма этих чисел четна.
- Вася: 1) Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. 2) Коля – лжец.
- Коля: 1) Все эти числа различны и делятся на 3. 2) Каждое из этих чисел меньше 20.
- Какие числа сообщили мальчикам?

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)**

8 класс

- 8.1. Выясните, делится ли на 3 число $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$.
- 8.2. На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из числа 1, 9, 9, 4 получить четыре равных числа?
- 8.3. Набор, состоящий из чисел a, b, c , заменили на набор $a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c , если их сумма равна -3 .
- 8.4. Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и побежал за ними домой со скоростью, в 2 раза большей, чем он шел вместе с Алисой. Схватив перчатки и веер, он побежал к Герцогине (с той же скоростью, что бежал домой). В результате Алиса пришла к Герцогине вовремя, а Кролик опоздал на 10 мин. На какое время был назначен прием у Герцогини?
- 8.5. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54 054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)
9 класс**

- 9.1. Можно ли разменять купюру в 50 рублей 15 монетами достоинством 1 и 5 рублей?
- 9.2. После возвращения цирка с гастролей знакомые расспрашивали дрессировщика Казимира Алмазова о «пассажирах» его автофургона: «Тигры были?» - «Да, причём их было в 7 раз больше, чем не тигров». – «А обезьяны?» - «Да, их было в 7 раз меньше, чем не обезьян». – «А львы были?» Ответьте за Казимира Алмазова. Ответ обоснуйте.
- 9.3. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.
- 9.4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе. На катете AC отмечена точка F , а на отрезке AD – точка E так, что $CD = DE$ и $FE \perp AB$. Найдите угол CBF .
- 9.5. Центр города представляет из себя квадрат 5×5 км, состоящий из 25 кварталов размером 1×1 км, границы которых – улицы, образующие 36 перекрестков. Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы о каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км?

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)
10 класс**

- 10.1. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении: $(2 - 3x + x^2)^{2019} \cdot (2 + 3x + x^2)^{2018}$.
- 10.2. Найдите три квадратных трёхчлена, каждый из которых имеет два различных корня и произведение которых неотрицательно на всей числовой оси. Не забудьте обосновать правильность примера!
- 10.3. Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а попаданий ниже семерки и промахов не было.
- 10.4. Биссектрисы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке I . Оказалось, что площади треугольника AIC и четырёхугольника $MINB$ равны. Докажите, что длины сторон треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию.
- 10.5. В пространстве даны 6 прямых. Каждая из них пересекается в точности с четырьмя из остальных, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что все данные прямые лежат в одной плоскости.

**Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
по математике (2018 - 2019 уч. год)**

11 класс

- 11.1. Про число x известно, что оно является решением уравнения $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$. Какие значения может принимать величина $x^3 - x^2 - x$?
- 11.2. «Как-то во время игры в шахматы у меня осталось фигур и пешек в 3 раза меньше, чем у соперника, и в 6 раз меньше, чем свободных клеток на доске, но я все равно выиграл эту партию!» - рассказывал однажды Федот Обормотов. Стоит ли ему верить?
- 11.3. Решите неравенство: $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$.
- 11.4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E , середину ребра $C_1 D_1$, и пересекает прямые AD_1 и $A_1 B$. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения прямой l с прямой $A_1 B$.
- 11.5. На доске 6×6 некоторые клетки покрасили в один из двух цветов. Оказалось, что если *хромая* ладья идёт с любой незакрашенной клетки до любой другой незакрашенной клетки, то она обязательно пройдёт через клетки двух цветов. (*Хромая* ладья за один ход может перейти из клетки в соседнюю, имеющую с ней общую сторону.) Какое наибольшее количество незакрашенных клеток могло быть на доске?

**Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады
школьников по математике (2018-2019 уч. год), 5 класс**

5.1. Ответ: цифры 3, 7, 9. Полученное число 2 854 106

5.2. Ответ: 38

Решение. $7ab - ab7 = 351$, $7a8 - a87 = 351$, $738 - 387 = 351$.

5.3. Ответ: винтик тяжелее шпунтика.

Решение. Массу одного винтика, одного шпунтика и одной гаечки обозначим В, Ш и Г. Тогда верно равенство $5В + 2Ш + 3Г = В + 7Ш + 4Г$, из которого следует, что верно равенство $4В = 5Ш + Г$. Это означает, что $4В > 5Ш$, но тогда $4В > 4Ш$, то есть $В > Ш$.

5.4. Ответ: Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра или Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра.
(наибольший балл выставляется за представленные оба ответа).

Решение. Так как если бы Митя встал в конец очереди, рядом с ним будет Юра, то Юра будет последним. Если бы Митя встал в середину очереди, то рядом с ним оказались бы Сеня и Костя, значит, Сеня и Костя стоят рядом: Костя за Сеней или Сеня за Костей. Перед ними стоит Толя (два мальчика перед Митей и два мальчика после Мити). А так как Митя стоит впереди очереди, то возможны два варианта.

5.5. Решение. Необходимо разрезать прямоугольник на три прямоугольника размерами 8×12 , 4×6 , 4×6 , из которых и сложить квадрат размерами 12×12 .

**Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады
школьников по математике (2018-2019 уч. год), 6 класс**

6.1.Решение. $35 \cdot 125 + 28 \cdot 125 + 63 \cdot 554 = 125(35 + 28) + 63 \cdot 554 = 125 \cdot 63 + 63 \cdot 554 = 63(125 + 554) = 63 \cdot 679$. Один из множителей делится на 679, значит, и произведение делится на 679.

6.2.Ответ: не могло.

Решение. Заметим, что число орехов у каждой пары детей делится на 3. Это означает, что суммарное число орехов должно делиться на 3. Однако 2018 на 3 не делится.

6.3.Ответ: 180 дверей.

Решение. Всего комнат 100. Все комнаты, кроме тех, что находятся вдоль сторон квадрата, имеют по 4 общие стены, поэтому в них по 4 двери. Таких комнат 64. В угловых комнатах (их 4) – по 2 двери. И в оставшихся 32 комнатах, расположенных вдоль сторон квадрата, – по 3 двери. Учитывая, что дверь соединяет две комнаты, получим $(64 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 32 \cdot 3) : 2 = 180$.

6.4.Ответ: мог.

Решение. Заметим, что если в банке было ровно 8 л меда, то за 4 дня Винни Пух мог съесть весь мед из банки. Если же в банке было 11 л меда, то Винни Пух мог съесть весь мед из банки за 5 дней. Поэтому если у него изначально было две банки меда с 11 литрами и одна банка с 8 литрами (всего 30 литров), то он мог съесть весь мед за 14 дней ($5 + 5 + 4 = 14$).

6.5.Решение. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «черный и белый». Если вынутый шарик окажется белым, значит, в этом ящике 2 белых, в ящике с надписью «2 белых» будет 2 черных, а с надписью «2 черных» будут черный и белый. Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик – черный.

Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (2018-2019 уч. год), 7 класс

7.1. Ответ: 975

Решение. Обозначим вторую и третью цифры трехзначного числа за x и y , тогда первоначальное число будет иметь вид $900 + 10x + y$. После переноса цифры 9 в конец числа число будет иметь вид: $100x + 10y + 9$. Учитывая, что разность чисел равна 216, после упрощения имеем $90x + 9y = 675$. Разделив обе части на 9, имеем $10x + y = 75$. Получим $x = 7$ и $y = 5$.

7.2. Решение. Например, $2013 + 1 \cdot 2 + 2 = 2017 \rightarrow 2013 + 1 + 2 \cdot 2 = 2018$.

7.3. Ответ: 75 км.

Решение. Если S км – весь путь путешественника, то в первый день он прошел $(0,2S + 2)$ км, во второй – $0,4S$ км, в третий $(0,1S + 2,5)$ км, в четвертый 18 км, поэтому $0,2S + 2 + 0,4S + 0,1S + 2,5 + 18 = S$. Откуда находим $S = 75$.

7.4. Решение. Допустим, каждое вычеркнутое слово написали ровно два человека. Так как они оба его вычеркнули, то число вычеркнутых записей четно. Но первоначальное число записей, равное 300, четно. Поэтому должно быть четным и число оставшихся записей. Однако по условию $45 + 68 + 54 = 167$ – нечетное число – противоречие.

7.5. Ответ: 3, 6, 9, 12, 15, 18.

Решение. Среди шести последовательных натуральных чисел ровно три нечетных. Поэтому их сумма нечетна. Значит, Петя солгал либо в первый раз, либо во второй, и поэтому он лжец, т.е. солгал оба раза. Но тогда лжец и Вася, потому что в первом своем высказывании он назвал шесть последовательных натуральных чисел. Так как Вася – лжец, то его высказывание, что Коля – лжец, ложно, и на самом деле Коля говорит правду. Есть только 6 различных натуральных чисел, делящихся на 3 и меньших 20, что и дает ответ.

Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (2018-2019 уч. год), 8 класс

8.1. Ответ: не делится.

Решение. $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018} = (1 + 2) + 2^2(1 + 2) + \dots + 2^{2016}(1 + 2) + 2^{2018} = 3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2016}) + 2^{2018}$

В данной сумме первое слагаемое делится на 3, а второе слагаемое не делится на 3. Поэтому сумма не делится на 3.

8.2. Ответ: нельзя.

Решение. После n операций из чисел 1, 9, 9, 4 получаются четыре числа, сумма которых равна $2n + 23$, т.е. нечетная. Если бы все эти числа были равны k , то их сумма равнялась бы $4k$, т.е. была бы четной.

8.3. Решение. Из того, что наборы совпадают, следует совпадение их сумм. Значит, $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = a + b + c = -3$, $(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 + (c^2 - 1)^2 = 0$, откуда $a^2 - 1 = b^2 - 1 = c^2 - 1 = 0$, т.е. $a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$. Условию $a + b + c = -3$ удовлетворяют только $a = b = c = -1$. Осталось проверить, что найденная тройка удовлетворяет условиям задачи.

8.4. Ответ: прием был назначен на 12 ч 40 мин.

Первое решение. Поскольку Кролик бежал со скоростью, вдвое большей, чем скорость Алисы, то в то время, когда Алиса пришла к Герцогине, Кролик вновь был на середине пути. Так как он опоздал на 10 мин, то Алиса затратила на половину пути 20 мин, а на весь путь 40 мин.

Второе решение. Пусть время, за которое Алиса дошла от дома Кролика до дома Герцогини, равно t мин. Кролик прошел половину пути вместе с Алисой, на это у него ушло $\frac{t}{2}$ мин. Затем он пробежал расстояние, равное $\frac{3}{2}$ расстояния от своего дома до дома Герцогини. Так как он бежал в 2 раза быстрее, то ему понадобилось в 2 раза меньше времени, т.е. $\frac{3t}{4}$ мин. Итого, Кролик затратил на весь путь $\frac{5t}{4}$ мин. Кролик опоздал на 10 мин, значит $\frac{5t}{4} - t = 10$, $t = 40$ мин.

8.5. Ответ: 638 деревень.

Решение. Если в деревне рыцарей больше, чем лжецов, то, судя по ответам, в такой деревне 66 рыцарей и 33 лжеца. Если же рыцарей меньше, чем лжецов, то в деревне 33 рыцаря и 66 лжецов. Получаем уравнение относительно количества деревень, где рыцарей больше: $66k + (1000 - k) \cdot 33 = 54054$. Отсюда находим, что $k = 638$.

Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (2018-2019 уч. год), 9 класс

9.1. Ответ: Нет, так как 15 нечетных слагаемых в сумме дают нечетное число, а 50 – четное число.

9.2. Ответ: львов не было. Решение: Поскольку тигров было в 7 раз больше, чем обезьян, то количество тигров составляет $\frac{7}{8}$ от общего количества всех животных. Поскольку обезьян было в 7 раз меньше, чем не обезьян, то количество обезьян составляет $\frac{1}{8}$ от общего количества всех животных. Так как $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$, то животных, отличных от тигров и обезьян, в фургоне не было.

9.3. Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни данного трехчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0, т.е. число $a + b + 1$ составное.

9.4. Ответ: $\angle CBF = 45^\circ$. Решение. В четырёхугольнике $BCFE$ $\angle BCF = \angle BEF = 90^\circ$ (рис.1), следовательно, около него можно описать окружность. Тогда $\angle CBF = \angle CEF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). В равнобедренном прямоугольном треугольнике CDE $\angle DEC = 45^\circ$, следовательно, $\angle CEF = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ = \angle CBF$.

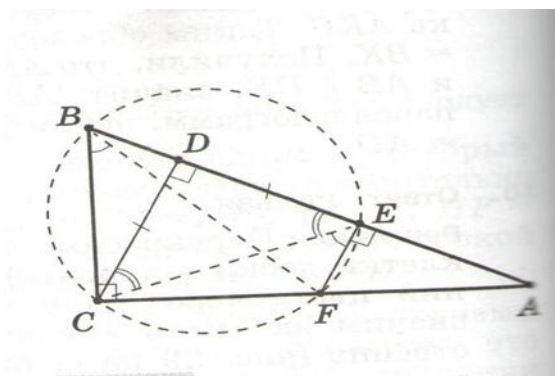


Рис. 1

9.5. Ответ: 4 полицейских. Рассмотрим угловой перекресток A . До него полицейский может добраться, если он находится на одном из 6 перекрестков, примыкающих к этому углу (рис. 2, а). Аналогичные рассуждения для трех оставшихся углов показывают, что для выполнения условия задачи необходимо наличие по крайней мере четырех полицейских. Осталось только привести пример расстановки четырех полицейских (рис. 2, б).

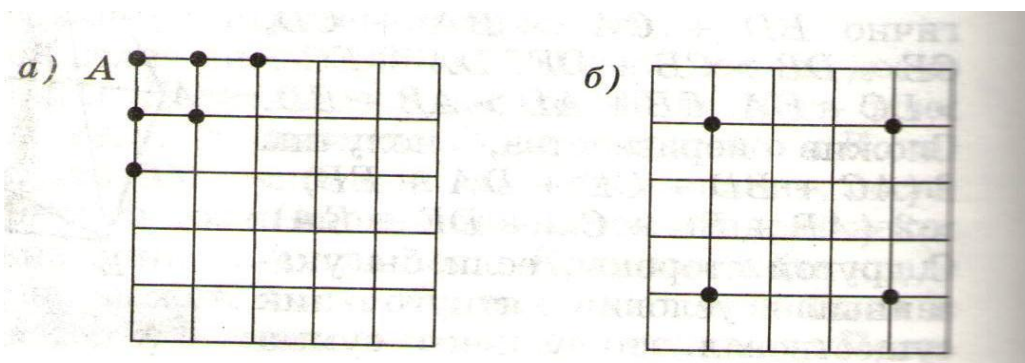


Рис. 2

Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (2018-2019 уч. год), 10 класс

10.1. Ответ: 0. Подставим $x = 1$.

10.2. Решение: Например, $x^2 - 1$, $x^2 - x$ и $x^2 + x$ имеют по два различных корня. Их произведение, равное $x^2(x-1)^2(x+1)^2$, неотрицательно.

10.3. Решение: Так как стрелок выбил 90 очков и 40 из них набрал за четыре раза, то за оставшиеся шесть выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку, то за три выстрела (по одному в семерку, восьмерку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: $8 + 9 + 9 = 26$. Таким образом, в семерку стрелок попал один раз, в восьмерку – два раза, а в девятку – три раза.

10.4. Решение: По условию $S_{AIC} = S_{MINB}$ (рис. 1). Прибавив к обеим частям этого равенства S_{CIM} , получаем $S_{AMC} = S_{CNB}$; с другой стороны, прибавляя к обеим частям этого же равенства S_{AIN} , получаем $S_{AMB} = S_{ANC}$. Значит, $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{S_{CNB}}{S_{ANC}}$. Поскольку точка M лежит на биссектрисе треугольника ABC , то она равноудалена от сторон AB и AC угла BAC , следовательно, в треугольниках ABM и ACM высоты из вершины M равны. Значит, $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{AC}{AB}$. Аналогично получаем $\frac{S_{CNB}}{S_{ANC}} = \frac{BC}{AC}$. Итак имеем $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, что и означает, что AB, AC, BC – геометрическая прогрессия.

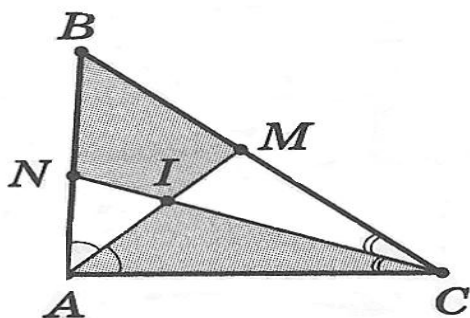


Рис. 1.

10.5. Решение: Пусть a – одна из данных прямых. По условию среди данных прямых есть единственная прямая b , не пересекающаяся с a . Пусть c – одна из четырёх оставшихся прямых. Кроме a и b , она пересекается ещё с какой-то прямой d из числа данных и потому лежит с ней в одной плоскости α . Но каждая из прямых a и b пресекаются как с c , так и с d , причём в различных точках. Стало быть, обе эти прямые a и b имеют с плоскостью α по две различные общие точки и потому лежат в ней. Осталось заметить, что каждая из двух оставшихся прямых e и f пересекается как с a , так и с b , причём в различных точках, и потому тоже лежат в плоскости α .

Ответы и решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (2018-2019 уч. год), 11 класс

11.1. Ответ: ± 1 . Решение: Проведем следующие преобразования: $x^4 - 2x^3 + 1 = x^4 - x^3 - x^3 + 1 = (x - 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$. Если x – корень исходного уравнения, то либо $x = 1$, либо выполнено равенство $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. В первом случае выражение $x^3 - x^2 - x$ равно -1 , во втором оно равно 1 .

11.2. Ответ: не стоит. Решение: Допустим, у Федота осталось k пешек и фигур. Если верить Федоту, в этот момент у его соперника пешек и фигур было $3k$, а пустых клеток на доске – $6k$. Но тогда получается, что всего на доске $k + 3k + 6k = 10k$ клеток, а на самом деле их там 64 – на 10 не делится.

11.3. Ответ: $(0; 1)$. Решение: Неравенство может иметь решения лишь в случае, если подкоренное выражение неотрицательно, то есть $y - x^2 - 1 \geq 0$. Из данного неравенства имеем $y \geq x^2 + 1$, значит, $y \geq 1$. Тогда $y^2 \geq 1$, и, учитывая, что $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$, имеем $\cos x \geq 1$. Но поскольку по свойствам функции $y = \cos x$: $|\cos x| \leq 1$, то неравенство может иметь решения лишь в случае $\cos x = 1$. В то же время, так как $y^2 \geq 1$, а $\cos x \geq 1$, то $y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} = 1$, что возможно лишь в случае $y = 1$ и $y - x^2 - 1 = 0$. Отсюда имеем, что $x = 0$. Ответ: $(0; 1)$.

11.4. Ответ: $\frac{3}{2}$. Решение: Рассмотрим плоскость AD_1C_1B . Так как прямая l проходит через середину ребра C_1D_1 и пересекает прямую AD_1 , она имеет с этой плоскостью две общие точки, а значит, целиком принадлежит этой плоскости. В то же время прямая A_1B лежит в плоскости AA_1B_1B . Поэтому точка пересечения прямых l и A_1B лежит на линии пересечения плоскостей AD_1C_1B и AA_1B_1B , т.е. на прямой AB . Но в то же время она принадлежит прямой A_1B , а значит, совпадает с точкой пересечения прямых l и A_1B , т.е. с точкой B . Итак, мы должны найти расстояние между точками E и B . Но это легко делается с помощью теоремы Пифагора: $BE = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

11.5. Ответ: 8. Решение: Рассмотрим квадрат 3×3 . Из любой клетки в его средней горизонтали можно добраться до любой клетки в его средней вертикали, пройдя по пути не более одной промежуточной клетки. Поэтому если в средней горизонтали квадрата 3×3 есть незакрашенная клетка, то в его средней вертикали незакрашенной клетки нет, и наоборот. Получается, что все незакрашенные клетки в квадрате 3×3 стоят либо в каких-то двух горизонталях, либо в каких-то двух вертикалях. Но в одной горизонтали или вертикали квадрата 3×3 не может быть больше одной незакрашенной клетки. Поэтому в квадрате 3×3 не больше двух незакрашенных клеток. Поскольку квадрат 6×6 разбивается на четыре квадрата 3×3 , в нем не может быть больше 8 незакрашенных клеток. Пример, когда не закрашено ровно 8 клеток (Рис. 1 – не единственный!) таков: сначала красим клетки доски в красный и синий цвета в шахматном порядке, а потом стираем раскраску у восьми клеток, указанных на рисунке 1.

	к	с		с	к
к	с	к	с	к	
с	к		к	с	к
	с	к	с	к	с
с	к	с		с	к
к		к	с	к	

Рис. 1.